Brüche

A6_01

Brüche haben die Form $\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. z heißt der **Zähler**, n der **Nenner** des Bruches.

Zerlegt man ein Ganzes z. B. in vier gleich große Teile und fasst dann drei dieser Teile zusammen, so erhält man den Bruch $\frac{3}{4}$.

Der Nenner eines Bruches darf niemals 0 sein!

Unterscheidung	Bezeichnung
z < n Bsp.: $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$	**echter Bruch**
z = 1 Bsp.: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$	**Stammbruch**
z > n Bsp.: $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{2}$	**Unechter Bruch**
n teilt z Bsp.: $\frac{9}{3}$; $\frac{8}{4}$	**Scheinbruch**

Gemischte Zahlen

Unechte Brüche können als gemischte Zahlen geschrieben werden und umgekehrt:

Bsp.: $\frac{5}{3} = 1\frac{5-3}{3} = 1\frac{2}{3}$ oder $\frac{11}{4} = 2\frac{11-2\cdot 4}{4} = 2\frac{3}{4}$

Umgekehrt: $1\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 3+1}{3} = \frac{4}{3}$ oder $3\frac{5}{8} = \frac{3\cdot 8+5}{8} = \frac{29}{8}$

Bruchzahlen

A 6_02

Zu jeder Bruchzahl gehören unendlich viele verschiedene Brüche (z.B.: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$).

$\mathbb{B}_0$ = Menge der Bruchzahlen. Es gilt: $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{B}_0$ ($4 \in \mathbb{B}_0$, $\frac{3}{7} \in \mathbb{B}_0$).

z : n = $\frac{z}{n}$.

Formänderung von Brüchen

a) **Erweitern** eines Bruches bedeutet: Zähler und Nenner werden mit derselben natürlichen Zahl multipliziert.

$$\frac{z}{n} = \frac{z\cdot k}{n\cdot k}, k \in IN \quad \text{(z.B.: } \frac{3}{4} = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{9}{12}\text{)}$$

b) **Kürzen** eines Bruches bedeutet: Zähler und Nenner werden durch einen gemeinsamen Teiler k dividiert.

$$\frac{z}{n} = \frac{z\div k}{n\div k}, k \in IN \quad \text{(z.B.: } \frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}\text{)}$$

Einen Bruch, den man nicht mehr kürzen kann, nennt man **vollständig gekürzt** (= **Grundform** des Bruches).

Berechnungen A 6_03

1. Berechnung des Teils einer Größe:

Bsp.: $\frac{9}{11}$ von 55 kg = (55 kg : 11)$\cdot 9$ = 45 kg

2. Berechnung des Ganzen

Bsp.: $\frac{3}{4}$ = 18 l => $\frac{1}{4}$ = 18:3 l = 6l => $\frac{4}{4}$ = 1 = 4$\cdot 6$ l = 24l

3. Berechnung des Anteils

Bsp.: 25 Schüler = 1 Ganzes

4 Schüler sind aus Helmstadt

$\frac{4}{25}$ Schüler sind aus Helmstadt

Anordnung der Bruchzahlen A 6_04

Von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige der größere, der den kleineren Nenner hat. (z.B.: $\frac{4}{9} < \frac{4}{7}$)

Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige der größere, der den größeren Zähler hat. (z.B.: $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$)

Brüche mit verschiedenen Nennern bringt man vor dem Vergleichen auf den **Hauptnenner** (= kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) aller Nenner).

Bsp.:

$$\frac{1}{3} = \frac{1\cdot 6}{3\cdot 6} = \frac{6}{18}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{4\cdot 2}{9\cdot 2} = \frac{8}{18} \quad => \quad \frac{1}{3} < \frac{4}{9} < \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{3\cdot 5}{3\cdot 6} = \frac{15}{18}$$

Rationale Zahlen A 6_05

Alle positiven und alle negativen Brüche und die Zahl 0 bilden zusammen die **Menge Q der rationalen Zahlen** ; die Menge Q enthält somit auch alle ganzen Zahlen und deshalb auch alle natürlichen Zahlen.

Anteile als Brüche, als Dezimalzahlen und in Prozent A 6_06

Um Anteile vergleichen zu können, werden sie häufig in Prozent geschrieben.

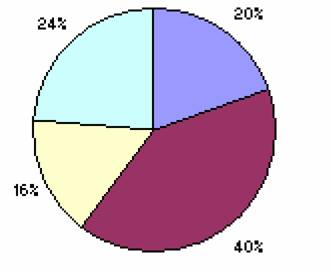
1Prozent = 1 „von je Hundert“ = $\frac{1}{100}$ = 0,01

Bsp.: 16% bedeutet $\frac{16}{100} =$ 0,16.

Häufige Prozentsätze sind: 25% = $\frac{1}{4} = 0{,}25$; 50% = $\frac{1}{2}$ = 0,5; 75% = $\frac{3}{4}$ = 0,75

Als Veranschaulichung von Anteilen bzw. Verteilungen bieten sich **Kreisdiagramme** an.

Dabei entsprechen 100% 360° bzw. 50 % = $\frac{1}{2}$ = 180°



Addieren und Subtrahieren von Brüchen **A 6_07**

Brüche mit gleichem Nenner werden addiert (subtrahiert), indem man die **Zähler addiert** (subtrahiert) und den **Nenner beibehält**.

(z.B.: $\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=\frac{7}{11}$, $\frac{7}{13}-\frac{3}{13}=\frac{4}{13}$, $\frac{-3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}+\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{2}{7}$)

Brüche mit verschiedenen Nennern erweitert man zuerst auf den **Hauptnenner**.

(z.B.: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$)

Multiplizieren **A 6_08**

Brüche werden multipliziert, indem man zuerst soweit wie möglich kürzt, und dann **Zähler mit Zähler** und **Nenner mit Nenner multipliziert**.

(z.B.: $\frac{3}{8}\cdot\frac{12}{9}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$)

Gemischte Zahlen müssen vor dem Multiplizieren in unechte Brüche verwandelt werden.

Bsp.: $2\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{12\cdot 5}{5\cdot 9}=\frac{4\cdot 1}{1\cdot 3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

Dividieren

Bruch : Bruch = Bruch · Kehrbruch

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ (z.B.: $\frac{3}{14}:\frac{6}{7}=\frac{3\cdot 7}{14\cdot 6}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$)

<u>Dezimalzahlen</u> **A 6_09**

Brüche, deren Nenner **Zehnerstufenzahlen** sind, können als endliche **Dezimalzahlen** geschrieben werden.

Zahlen wie z.B. 1,356 heißen **Dezimalbrüche**. Dabei bedeutet die 1.(2.,3.,...) Stelle hinter dem Komma Zehntel (Hundertstel, Tausendstel,....).Die Ziffern hinter dem Komma heißen **Dezimalen.**
„Endnullen" hinter dem Komma haben keinen Einfluss auf den Wert der Dezimalzahl.

Bsp.: 0,5 = $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ = 0,50

(z.B.: $\frac{4}{10}$ = 0,4 oder $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$ = 0,20 = 0,2

0,04 = $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$; 1,234 = $1\frac{234}{1000} = 1\frac{117}{500}$)

Ordnen von Dezimalbrüchen nach der Größe

Von zwei Dezimalbrüchen ist derjenige der größere, der von links nach rechts gelesen zuerst eine höhere Ziffer hat

(z.B.: 1,2345 < 1,2346).

<u>Runden von Dezimalbrüchen</u> **A 6_10**

Ist die erste wegzulassende Ziffer 0 ,1, 2, 3, 4, so wird abgerundet, ist sie 5, 6, 7, 8, 9, so wird aufgerundet.

(z.B.: Runden auf:	1 Dez.	2 Dez.	3 Dez.
	3,4564 ≈3,5	3,4564 ≈3,46	3,4564 ≈3,456

Regeln für das Rechnen mit Dezimalzahlen I: A 6_11

Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

Addition (Subtraktion) der Stellen gleichen Wertes. Haben die zu addierenden (subtrahierenden) Dezimalzahlen unterschiedliche Anzahl an Dezimalen, so füllt man - zur Vermeidung von Fehlern - Endnullen auf.

(z.B.: 3,761 + 4,32 = 3,761 + 4,320 = 8,081)

Multiplikation und Division mit Zehnerpotenzen

Verschieben des Kommas um so viele Stellen nach rechts (links), wie die Stufenzahl Nullen hat.

(z.B. 2,04 $\cdot$ 1000 = 2040; 14,73 : 100 = 0,1473)

Multiplikation von Dezimalbrüchen

Die **Kommas** bleiben beim Multiplizieren zunächst **unberücksichtigt**.
Das Ergebnis erhält **so viele Dezimalen**, wie die **Faktoren zusammen** haben.

(z.B.: 1,86 $\cdot$ 0,54

```
   1,86 · 0,54
     930
      744
   1,0044   )
```

Regeln für das Rechnen mit Dezimalzahlen II: A 6_12

Division durch eine natürliche Zahl

Vor dem Herabholen der 1.Ziffer hinter dem Komma wird im Ergebnis das Komma gesetzt.

```
(z.B.: 9,2 : 8 = 1,15 )
       8
       1 2
         8
         40
```

Division durch einen Dezimalbruch

Keine Quotientenwertänderung, wenn man bei beiden Zahlen das Komma um gleich viele Stellen in gleicher Richtung verschiebt (=**gleichsinnige Kommaverschiebung).**

Das Komma wird beim Divisor so weit verschoben, bis er eine natürliche Zahl ist.

(z.B.: 2,56 : 1,6 = 25,6: 16 = 1,6).

Umformen gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt A 6_13

Jeder Bruch lässt sich in eine Dezimalzahl umwandeln, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert! Dabei können diese zwei Fälle auftreten.

z:n =

<u>endlicher Dezimalbruch</u>
(wenn der Nenner nur die Faktoren 2 und 5 enthält)

<u>unendlicher periodischer Dezimalbruch</u>
(wenn der Nenner weitere Faktoren außer 2 und 5 enthält)

Die sich wiederholende Ziffernfolge heißt **Periode.**

Periodischer Dezimalbruch $\mapsto$ **Gewöhnlicher Bruch**

Falls die Periode direkt hinter dem Komma beginnt **(reinperiodisch)**, gilt:
Zähler = Periode ,
Nenner = so viele Neuner, wie die Periode Ziffern hat
(z.B.: $0,\overline{23} = \frac{23}{99}$)

Zufallsexperimente

W 6_01

Zufallsexperimente sind Vorgänge, deren Ergebnis **zufällig**, also nicht voraussagbar ist.
Beispiele:

- Würfeln mit einem Spielwürfel
- Ziehen von Lose
- Werfen einer Münze

Bsp.: Eine Münze (mit Kopf und Zahl) wird zweimal geworfen. Alle möglichen Ergebnisse sind:

$$\{ZZ; KK; ZK; KZ\}$$

Relative Häufigkeit

W 6_02

Ein Spielwürfel wird n-mal (z.B. 30-mal) geworfen; k-mal (z.B. 6-mal) erscheint die Augen - zahl 1.

Anzahl der „Einser: 6 (absolute Häufigkeit)

Anteil der „Einser“: $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ = 20 % (relative Häufigkeit)

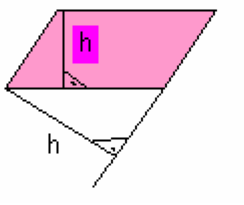
Allgemein:
Relative Häufigkeit:

$$\frac{k}{n} = \frac{\text{"}so\ oft\ ist\ ein\ bestimmtes\ Versuchsergebnis\ eingetreten\text{"}}{\text{"}so\ oft\ ist\ das\ Zufallsexperiment\ durchgeführt\ worden\text{"}}$$

Parallelogramm

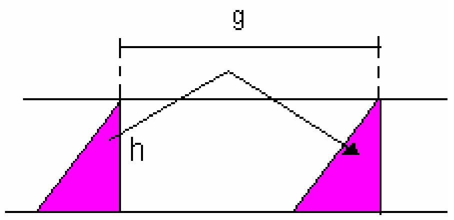
G 6_01

Ein Parallelogramm ist ein Viereck. Die gegenüberliegenden Seiten sind jeweils gleich lang und parallel.
Der Abstand zweier paralleler Seiten heißt **Höhe**.



<u>Hinweis</u>: Mit **Abstand** ebenso wie mit **Höhe** kann sowohl eine Strecke als auch deren Länge gemeint sein. Der Abstand stellt immer die kürzeste Verbindung dar. Er wird mit Hilfe eines Lotes ermittelt..

Flächeninhalt eines Parallelogramms:

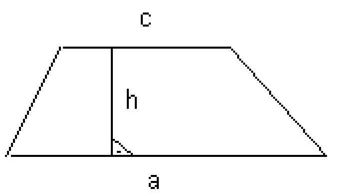


Es gilt $\mathbf{A}_{\mathbf{Parallelogramm}} = \mathbf{A}_{\mathbf{Rechteck}} = g \cdot h$

Trapez

G 6_02

Trapeze sind Vierecke, bei denen zwei gegenüberliegende Seiten zueinander parallel sind.
Man nennt diese zueinander parallelen Seiten **Grundlinien** oder auch **Parallelseiten**; ihr Abstand wird als **Höhe** bezeichnet.



Sind die beiden nicht parallelen Seiten gleich lang, so spricht man von einem **gleichschenkligen Trapez**.

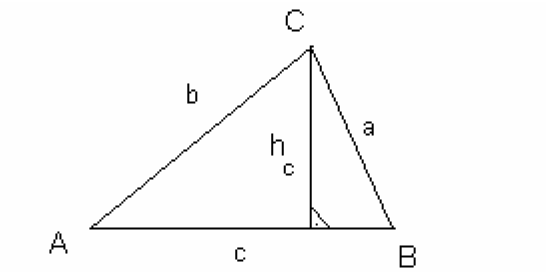
Flächeninhalt:

$\mathbf{A}_{\mathbf{Trapez}} = \frac{1}{2}(a+c)\,h = \frac{a+c}{2} \cdot h$

Dreiecke

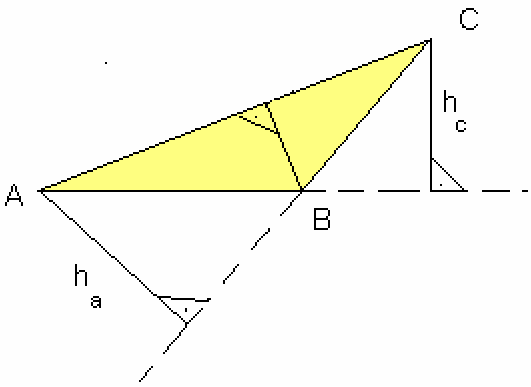
G 6_03

Jedes Dreieck besitzt drei Seiten, die man manchmal auch Grundlinien nennt.
Der Abstand einer Ecke von der gegenüberliegenden Seite heißt **Höhe.** Bei stumpfwinkligen Dreiecken liegen zwei der drei Höhen außerhalb des Dreiecks.
Dreieck



Flächeninhalt:

$$\boxed{A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\, g\, h}$$



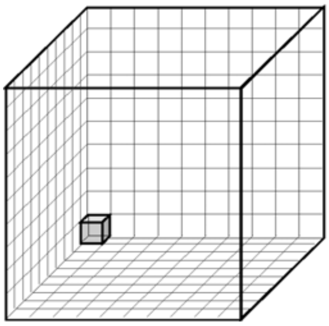
Rauminhalte

G 6_04

Volumeneinheiten

Hat ein Würfel die Kantenlänge	so ist sein Volumen
1mm	$1mm^3$
1cm	$1cm^3$ = 1ml
1dm	$1dm^3$ = 1l
1m	$1m^3$

Umrechnungsfaktor ist 1000:
$1cm^3 = 1000\ mm^3$
$1\ dm^3 = 1l = 1000cm^3$



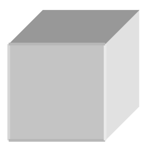
Das Volumen des Quaders

$$\boxed{V_Q = l \cdot b \cdot h}$$

l = Länge, b = Breite, h = Höhe

Das Volumen des Würfels

$$\boxed{V_W = s^3}$$



s = Seitenlänge **s**

Oberfläche Quader und Würfel

G 6_05

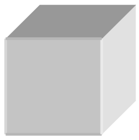
Die Oberfläche des Quaders

$$A_Q = 2\,(l \cdot b + l \cdot h + h \cdot b)$$

l = Länge, b = Breite, h = Höhe

Die Oberfläche des Würfels

$$A_w = 6 \cdot s \cdot s = 6s^2$$

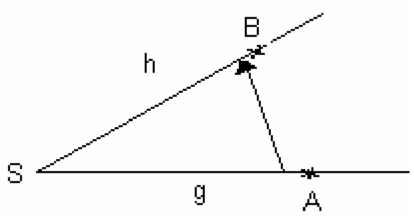


s = Seitenlänge **s**

Der Winkel

G 6_06

Winkel werden gegen den Uhrzeigersinn gemessen.
Winkel werden mit griechischen Buchstaben wie z. B. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ oder mit Hilfe von 3 Punkten bezeichnet.



Bezeichnungen: $\sphericalangle$(g, h) oder $\sphericalangle$ASB

Winkeleinheiten: 1° = 60´ (Winkelminuten)
1´ = 60´´ Winkelsekunden)

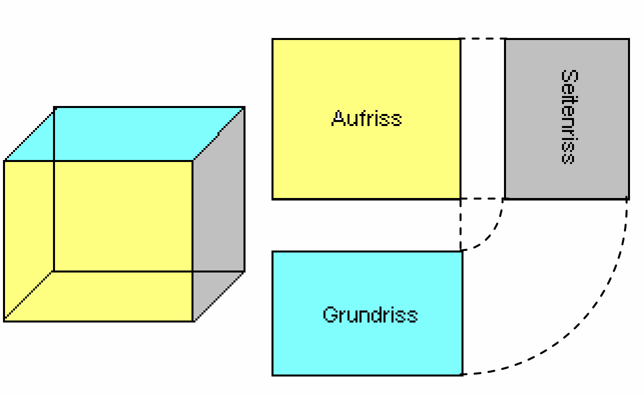
Winkelarten:

Gradzahl	Bezeichnung
$\alpha = 0°$	Nullwinkel
$0° < \alpha < 90°$	spitzer Winkel
$\alpha = 90°$	rechter Winkel
$90° < \alpha < 180°$	stumpfer Winkel
$\alpha = 180°$	gestreckter Winkel
$180° < \alpha < 360°$	überstumpfer Winkel
$\alpha = 360°$	Vollwinkel

Grundriss, Aufriss, Seitenriss G 6_07

Um eine räumliche Vorstellung von einem Körper zu erhalten, stellt man ihn häufig aus mehreren verschiedenen Richtungen betrachtet dar:

Der **Grundriss** zeigt, wie der Körper (senkrecht) von oben betrachtet aussieht.
Der **Aufriss** zeigt, wie der Körper von vorne betrachtet aussieht.
Ein **Seitenriss** zeigt, wie der Körper von rechts (oder von links) betrachtet aussieht.

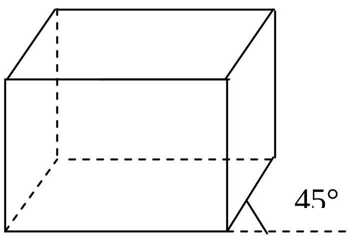


Schrägbild G 6_08

In einem **Schrägbild** wird ein Körper so gezeichnet, dass man ihn sich räumlich gut vorstellen kann.

Die „nach hinten" verlaufenden Quaderkanten werden schräg und verkürzt, aber zueinander parallel gezeichnet. Häufig trägt man sie unter einem Winkel von 45° und in halber Länge an.

Unsichtbare Kanten werden gestrichelt eingezeichnet.



<u>Prozentsatz, Grundwert, Prozentwert</u> A 6_14

Das **Ganze**, dessen Anteile verglichen werden, bildet den **Grundwert**.
Jeden **Anteil** am Ganzen, also am Grundwert, kann man (in **Bruchform** oder) in **Prozent** angeben; er stellt den **Prozentsatz** dar. Der jeweilige Teil des Ganzen bildet den **Prozentwert**.

$p\% = \frac{p}{100}$

Es gilt: p% von G = P

p% **= Prozentsatz**, G **= Grundwert,** P = **Prozentwert**

Dem Grundwert werden immer 100% zugeordnet.

Bsp.:An einer Klassensprecherwahl beteiligen sich 30 Kinder. Gregor erhält 24 stimmen.

G= 30 ; P = 24; p = 80%

<u>Prozentrechnung</u> A 6_15

a) Berechnung des Prozentwertes: **P = p% von G =** $\frac{p}{100} \cdot$ **G**

Bsp.: 15 % von 40 € : $\frac{15}{100} \cdot 40€ = 6€$ oder $0{,}15 \cdot 40€ = 6€$

b) Berechnung des Grundwertes G: **p% $\mapsto$ P**
100% $\mapsto$ G

Bsp.: 32% aller 6.-Klässler des BNG, das sind 24 Schüler haben ein Haustier.

	32% = 24 Schüler	
:32	1 % = 0,75 Schüler	:32
*100	100% = 75 Schüler	*100

c) Berechnung des Prozentsatzes : $\frac{P}{G} = \frac{P \cdot 100}{G}$ **% = p%**

Bsp.: Die Klasse 6c hat 25 Schüler. 4 Schüler der Klasse wohnen in Marktheidenfeld.

Angabe in Prozent: $\frac{4 \cdot 100}{25}\% = 16\%$

<u>Dreisatz</u> **A 6_16**

Gehört zum Doppelten, Dreifachen, Vierfachen,...einer Größe das Doppelte, Dreifache, Vierfache, ...einer anderen Größe, so kann man von einem Vielfachen der einen Größe auf das entsprechende Vielfache der anderen Größe schließen.

Bsp.: Lucas bezahlt für 12 Semmeln 4, 32€. Wie viel kosten 15 Semmeln?

12 Semmeln kosten 4, 32 €

:12 → 1 Semmel kostet 4, 32€ : 12 = 0, 36 € ← :12

*15 → 15 Semmeln kosten 15 0,36€ = 5, 40 € ← *15